Análisis Armónico

Aplicación de las series de Fourier a las observaciones de las temperaturas medias mensuales de Santiago, recogidas en el Observatorio Astronómico Nacional durante cuarenta años.

POR ISMAEL GAJARDO REYES

(Desde el 1.° de Enero de 1861 hasta el 31 de Diciembre de 1900).

En un discurso célebre, pronunciado en Londres en 1877, afirmaba el eminente físico inglés *Sir William Thomson* (*Lord Kelvin*) que: "para que las observaciones resultasen utilizables y con real valía científica, se hacía preciso reducirlas con el auxilio del "*Análisis Armónico*".

La *Meteorología* es precisamente una de las ciencias de observación en la que más aplicación tienen *las dichas series trigonométricas*, llamadas también de *Fourier*, por su inventor, y "*Análisis Armónico*" su aplicación entre los ingleses, y a pesar de la gran utilidad que reportaría su generalización, y de los trabajos de meteorólogos tan eminentes como Mr. A. Angot, Dove, Sir Edward Sabine, etc., es un hecho bien cierto de que escasean mucho las publicaciones en las que figuren, no tanto por no ser muy conocidas, como porque se juzgan excesivamente laboriosos los cálculos que exigen.

En este trabajo, vamos a dar una breve explicación sobre dichas series, *en todo cuanto resulte indispensable para su aplicación,* la que haremos en un caso concreto.

El fenómeno de las *mareas oceánicas* se presta admirablemente para la aplicación del "*Análisis Armónico*", y entre los fenómenos meteorológicos que más se prestan a su aplicación se hallan *la temperatura* y *la presión atmosférica,* sujetas ambas a cambios periódicos, caracterizados por máximos y mínimos, los que, relacionados con las medias correspondientes y representados gráficamente, dan curvas del tipo de las sinusoides, o muy parecidas, con tendencia a reproducirse, una vez terminado *el ciclo.* (*año en la temperatura, día en la presión*).

La forma típica de las series trigonométricas de Fourier es:

$$y = a_0 + a_1 \operatorname{sen} (A_1 + x) + a_2 \operatorname{sen} (A_2 + 2x) + \dots\dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

en la cual a_0 es la *media,* alrededor de la cual oscilan los valores de las medias parciales;

a_1, a_2...., las *amplitudes* de los períodos parciales, o *constituyentes armónicos,* o, quizás más claramente, *los coeficientes de los mismos;*

A_1, A_2...., las *fases* correspondientes, esto es, su *adelanto* (positivo, negativo o nulo), con respecto a *la variable independiente x,* en este caso tiempo, expresado en relación con el de un ciclo completo = 360,° equivalente a *un año, día*...

La fórmula (α) no es muy apropiada para el cálculo de las constantes que necesitamos. Para transformarla en otra directamente aplicable, bastará recordar la que da el valor del seno de la suma de dos ángulos

$$a \operatorname{sen} (A + x) = (a \operatorname{sen} A) \cos x + (a \cos A) \operatorname{sen} x \dots. \quad (\beta)$$

Ahora bien, si hacemos

$$\left.\begin{aligned} a \operatorname{sen} A &= p \\ a \cos A &= q \\ \text{y} \qquad & \\ \frac{p}{q} &= \tan A \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (\gamma)$$

la fórmula (β) tomará esta forma

$$a \operatorname{sen}(A + x) = p \cos x + q \operatorname{sen} x \qquad (\beta)$$

Por consiguiente, la serie de que nos ocupamos será de la forma

$$\left.\begin{aligned} y = a_0 + p_1 \cos x + p_2 \cos 2x + \ldots + p_6 \cos 6x + \\ + q_1 \operatorname{sen} x + q_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + q_5 \operatorname{sen} 5x \end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

de la que será después tarea muy fácil deducir la primitiva fórmula (α), de acuerdo con lo expuesto.

En la serie (δ), a_0 es la media aritmética de las observaciones; así como p_1, q_1, p_2, q_2..., se determinan con arreglo a las fórmulas que vamos a dar en seguida.

Pero, desde luego, debemos hacer presente que para determinar estas constantes hay que distinguir dos casos:

1.° Cuando la función se conoce de un modo completo, lo que muy rara vez puede ocurrir en la práctica; y

2.° Cuando la función es desconocida o se conoce de un modo incompleto, que es lo que generalmente ocurre en la práctica.

1er. caso.—Determinación de las constantes cuando la función es conocida.

En este caso, las constantes se determinan por las fórmulas que vienen a continuación:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\,dx, \qquad p_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos kx\, dx, \\ q_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \operatorname{sen} kx\, dx, \end{aligned}\right\} \quad (\epsilon)$$

(*Véase Apéndice*)

fórmulas que se obtienen muy fácilmente de la manera siguiente:

Sin embargo, y en obsequio de la brevedad, sólo indicaremos el procedimiento para obtener la 1.ª, pues las otras dos se obtienen de idéntica manera. (*V. Apénd.*)

Si, en la serie

$$y = f(x) = a_0 + p_1 \cos x + p_2 \cos 2x + \ldots\ldots\ldots + p_n \cos nx +$$
$$+ q_1 \operatorname{sen} x + q_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + q_n \operatorname{sen} nx + \ldots$$

multiplicamos ambos miembros por dx e integramos entre los límites o y 2π, obtendremos:

$$\int_0^{2\pi} y dx = a_0 \int_0^{2\pi} dx + p_1 \int_0^{2\pi} \cos x \, dx + \ldots + p_n \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx + \ldots$$

$$+ q_1 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \ldots\ldots + q_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \, dx +$$

$$\int_0^{2\pi} y\, d x = a_0 \Big[x\Big]_0^{2\pi} + p_1 \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi} + \ldots\ldots + \frac{p_n}{n}\Big[\operatorname{sen} n x\Big]_0^{2\pi} + \ldots$$

$$- q_1 \Big[\cos x\Big]_0^{2\pi} - \ldots - \frac{q_n}{n}\Big[\cos n x\Big]_0^{2\pi} - \ldots$$

y, finalmente

$\int_0^{2\pi} y\, d x = 2\pi a_0$, puesto que todos los términos del 2.° miembro desaparecen, a excepción del 1.°.

Así, resultará:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\,d\,x \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

2.º caso. -Determinación de las constantes cuando la función es desconocida o se le conoce de un modo incompleto.

En este caso que es, como dijimos, el que generalmente se presenta en la práctica, siempre será posible conocer algunas de las ordenadas y se podrá, por tanto, hacer con ellas un trazado aproximado de la curva.

La curva quedará así representada por una serie trigonométrica con un número finito de términos.

Se dividirá en seguida el intervalo, desde $x=0$ hasta $x=2\pi$, en *n* intervalos iguales y se medirán las primeras *n* ordenadas.

El problema quedará entonces circunscrito a resolver una serie de *n* ecuaciones lineales, cuyos términos son sumas de cosenos o senos de *n* ángulos que crecen en progresión aritmética.

Como se comprenderá, los desarrollos son muy largos; pero, aplicando conocidos teoremas de Trigonometría, se llega fácilmente a las siguientes fórmulas, que bien podemos considerar como las fórmulas rigurosas del "*Análisis Armónico*"

Dichas fórmulas son:

(*Véase Apéndice*)

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{n}\,\Sigma\, y_r = \frac{1}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right),\\
p_k &= \frac{2}{n}\,\Sigma y_r \cos kx_r = \frac{2}{n}\left(y_0 \cos kx_0 + y_1 \cos kx_1 + \ldots + y_{n-1} \cos kx_{n-1}\right),\\
q_k &= \frac{2}{n}\,\Sigma y \operatorname{sen} kx_r = \frac{2}{n}\left(y_0 \operatorname{sen} kx_0 + y_1 \operatorname{sen} kx_1 + \ldots + y_{n-1} \operatorname{sen} kx_{n-1}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (\eta)$$

en las que k tiene los valores 1, 2, 3... y r toma sucesivamente los valores 0, 1, 2, ... n—1.

Sin embargo, estas fórmulas, por su estructura misma, no son muy adecuadas para el cálculo numérico de los coeficientes.

De ahí que los más grandes matemáticos se hayan empeñado en simplificarlas, dándoles una forma tabular, lo que han conseguido de un modo admirable.

En estos trabajos de simplificación, ordenación y tabulación de las fórmulas rigurosas del "*Análisis Armónico*" se han distinguido, de un modo notable, el Profesor de Matemáticas de la Universidad de Göttingen, *Dr. Carlos T. Runge*, y el Profesor de Física *Silvano P. Thompson*, Director del "City and Guilds Technical College" de Finsbury (Inglaterra), cuyos métodos y esquemas son los que nos han servido de guía para la elaboración de esta monografía.

El Profesor Runge ha dado a conocer sus métodos en varias revistas alemanas de Ciencias Físicas y Matemáticas, y, muy principalmente, en el folleto intitulado "*Erläuterung des Rechnungsformulars*", etc., que se publicó en Brunswick el año 1913, y el Profesor Thompson en las revistas inglesas "*Proceedings of the Physical Society of London*" y "*The Electrician*", en cuyas páginas encontrarán los hombres de estudio todas las informaciones necesarias para profundizar sus conocimientos en el interesante problema del "*Análisis Armónico*".

Creemos también de justicia hacer presente que han contribuído al esclarecimiento de està cuestión, con valiosos e interesantes trabajos, los profesores ingleses *T. R. Running, H. O. Taylor* y *E. T. Whittaker*, cuyos métodos y esquemas se aplican en el laboratorio de matemáticas de la Universidad de Edinburgo.

El notable astrónomo *H. H. Turner*, Director del Observatorio de la Universidad de Oxford, ha publicado, además, unas excelentes tablas que facilitan mucho los cálculos relativos al "*Análisis Armónico*".

Así, pues, los ingleses, fieles a la recomendación de *Lord Kelvin*, son los que más han contribuído a simplificar y a difundir el "*Análisis Armónico*".

Más adelante, haremos una aplicación de las fórmulas rigurosas del grupo (η) al cálculo de *una de las armónicas*, con el objeto de que se vea, con toda claridad, que ellas implican casi tanto o más trabajo que el que exige el esquema ideado por los profesores Runge y Thompson para la determinación de los coeficientes de *todas las armónicas*.

CÁLCULO NUMÉRICO DE LOS COEFICIENTES DE ONDAS ARMÓNICAS PARES E IMPARES

Esquema para 12 ordenadas

Ordenadas......	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Suma (v)	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
Diferencia (w)...		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	

	v_0	v_1	v_2	v_3	w_1	w_2	w_3
	v_6	v_5	v_4		w_5	w_4	
Suma (m)	m_0	m_1	m_2	m_3	r_1	r_2	r_3
Dif. (n)	n_0	n_1	n_2		s_1	s_2	

	m_0	m_1		r_1	n_0
	m_2	m_3		r_3	n_2
Suma (l)	l_0	l_1	Dif. (t)	t_1	t_2

Multiplicadores de las cantidades que figuran en las mismas líneas horizontales antes de inscribir éstas.	Términos en coseno				Términos en seno		
sen 30° = 0,500 sen 60° = 0,866 sen 90° = 1,000	n_2 n_1 n_0	$-m_2$ m_1 m_0-m_3	t_2	l_0 l_1	r_1 r_2 r_3	s_1 s_2	t_1
Suma de la 1.ª columna. Suma de la 2.ª columna.	....	....		....	....	....	
Suma	$6\,p_1$	$6\,p_2$	$6\,p_3$	$12\,a_0$	$6\,q_1$	$6\,q_2$	$6\,q_3$
Diferencia	$6\,p_5$	$6\,p_4$		$12\,p_6$	$6\,q_5$	$6\,q_4$	

Comprobaciones. . . . . $y_0 = a_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$

$$y_1 - y_{11} = (q_1 + q_5) + \sqrt{3}(q_2 + q_4) + 2q_3$$

Resultado . . . . $y = a_0 + p_1 \cos x + p_2 \cos 2x + \ldots\ldots + p_6 \cos 6x +$

$$+ q_1 \operatorname{sen} x + q_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots\ldots\ldots + q_5 \operatorname{sen} 5x.$$

Aplicación a la curva periódica de la temperatura de Santiago.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°		330°
y	19,91	18,79	16,62	13,19	10,06	7,85	7,88	9,00	11,43	13,57	16,59	19,07

Ordenadas.	19,91	18,79	16,62	13,19	10,06	7,85	7,88
		19,07	16,59	13,57	11,43	9,00	
Suma (v)	19,91	37,86	33,21	26,76	21,49	16,85	7,88
Dif. (w).		— 0,28	+0,03	—0,38	—1,37	—1,15	

	19,91	37,86	33,21	26,76	—0,28	+0,03	—0,38
	7,88	16,85	21,49		—1,15	—1,37	
Suma (m).	27,79	54,71	54,70	26,76	(r)—1,43	—1,34	—0,38
Dif. (n).	12,03	21,01	11,72		(s)+0,87	+1,40	

	27,79	54,71		—1,43	+12,03
	54,70	26,76		—0,38	+11,72
Suma (l).	82,49	81,47	Dif. (t)	—1,05	+0,31

Multiplicadores	Términos en coseno				Términos en seno		
0,500	5,81	—27,35 27,36			—0,72		
0,866	18,19				—1,16	+0,75+1,21	
1,000	12,03	27,79—26,76	0,31	82,49 81,47	—0,38		—1,05
Suma 1.ª columna	17,84	0,44		82,49	—1,10	+0,75	
Suma 2.ª columna . . .	18,19	0,60		81,47	—1,16	+1,21	
Suma......	$36,03 = 6p_1$	$1,04 = 6p_2$	$0,31 = 6p_3$	$163,96 = 12a_0$	$—2,26 = 6q_1$	$1,96 = 6q_2$	$—1,05 = 6q_3$
Diferencia..	$—0,35 = 6p_5$	$—0,16 = 6\,p_4$		$1,02 = 12p_6$	$0,06 = 6q_5$	$—0,46 = 6q_4$	

$p_1 = +6{,}01 \quad p_2 = +0{,}17 \quad p_3 = +0{,}05 \quad a_0 = 13^\circ{,}66 \quad q_1 = —0{,}38 \quad q_2 = +0{,}33$

$p_5 = —0{,}06 \quad p_4 = —0{,}03 \quad p_6 = +0{,}09 \quad q_5 = +0{,}01 \quad q_4 = —0{,}08$

$q_3 = —0{,}18$

Comprobaciones:

$$y_0 = 19{,}91 = 13^\circ{,}66 + 6{,}01 + 0{,}17 + 0{,}05 — 0{,}03 — 0{,}06 + 0{,}09 = 19{,}89$$

$$y_1 — y_{11} = — 0{,}28 = (—0{,}38 + 0{,}01) + 1{,}732(0{,}33 — 0{,}08) + 2(—0{,}18) = —0{,}30$$

Resultado.

$$\begin{aligned} y = {} & 13{,}^\circ 66 + 6{,}01 \cos x + 0{,}17 \cos 2x + 0{,}05 \cos 3x — 0{,}03 \cos 4x \\ & — 0{,}06 \cos 5x + 0{,}09 \cos 6x — 0{,}38 \operatorname{sen} x + 0{,}33 \operatorname{sen} 2x \\ & — 0{,}18 \operatorname{sen} 3x — 0{,}08 \operatorname{sen} 4x + 0{,}01 \operatorname{sen} 5x \end{aligned}$$

Determinación de las amplitudes, períodos y fases de las ondas armónicas sucesivas

Las amplitudes, períodos y fases de las ondas armónicas sucesivas se calculan por medio de las expresiones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} & p_k \cos kx + q_k \operatorname{sen} kx = c_k \operatorname{sen} (kx + A_k) \\ & c_k = \sqrt{p_k^2 + q_k^2} \quad \text{y} \quad \tan A_k = \frac{p_k}{q_k} \end{aligned}\right\} \quad (\sigma)$$

que se obtienen, muy fácilmente, de esta manera:

En efecto, sean dos ondas cualquiera, representadas por las ecuaciones

$$y_1 = p_k \cos kx$$

$$y_2 = q_k \operatorname{sen} kx$$

La onda resultante tendrá esta expresión:

$$y = p_k \cos kx + q_k \operatorname{sen} kx$$

y multiplicando y dividiendo ambos términos del 2.° miembro por

$$\sqrt{p_k^2 + q_k^2},$$

lo que en nada alterará la ecuación, tendremos:

$$y = \sqrt{p_k^2+q_k^2} \left[\frac{p_k}{\sqrt{p_k^2 + q_k^2}} \cos k\,x + \frac{q_k}{\sqrt{p_k^2 + q_k^2}} \operatorname{sen} kx \right] \quad \text{(I)}$$

Ahora bien, hagamos:

$$\sqrt{p_k^2+q_k^2} = c_k; \quad \frac{p_k}{\sqrt{p_k^2+q_k^2}} = \operatorname{sen} A_k; \quad \frac{q_k}{\sqrt{p_k^2+q_k^2}} = \cos A_k$$

de donde

$$\tan A_k = \frac{p_k}{q_k}$$

y la fórmula (I) se convertirá en esta otra:

$$y = c_k \left[\operatorname{sen} A_k \cos kx + \cos A_k \operatorname{sen} kx\right] = c_k \operatorname{sen} (kx + A_k)$$

Recopilando, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} & p_k \cos kx + q_k \operatorname{sen} kx = c_k \operatorname{sen} (kx + A_k) \\ & c_k = \sqrt{p_k^2 + q_k^2} \text{ y } \tan A_k = \frac{p_k}{c_k} \end{aligned}\right\} \quad (\sigma)$$

(Q. E. D.)

en las que $k = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

CÁLCULO DE LAS ARMÓNICAS

$p_1 = +6{,}01$	$p_1^2 = 36{,}1201$	$C_1 = \sqrt{36{,}2645} = 6{,}0220$
$p_2 = +0{,}17$	$p_2^2 = 0{,}0289$	$C_2 = \sqrt{0{,}1378} = 0{,}3712$
$p_3 = +0{,}05$	$p_3^2 = 0{,}0025$	$C_3 = \sqrt{0{,}0349} = 0{,}1868$
$p_4 = -0{,}03$	$p_4^2 = 0{,}0009$	$C_4 = \sqrt{0{,}0073} = 0{,}0855$
$p_5 = -0{,}06$	$p_5^2 = 0{,}0036$	$C_5 = \sqrt{0{,}0037} = 0{,}0608$
$p_6 = +0{,}09$	$p_6^2 = 0{,}0081$	
$q_1 = -0{,}38$	$q_1^2 = 0{,}1444$	
$q_2 = +0{,}33$	$q_2^2 = 0{,}1089$	
$q_3 = -0{,}18$	$q_3^2 = 0{,}0324$	
$q_4 = -0{,}08$	$q_4^2 = 0{,}0064$	
$q_5 = +0{,}01$	$q_5^2 = 0{,}0001$	

$$\tan A_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{+6{,}01}{-0{,}38}$$

$$\begin{aligned} \log 6{,}01 &= 0{,}77887 \\ \log -0{,}38 &= 9{,}57978\ n \\ \hline &\ 1{,}19909\ n \end{aligned}$$

$$\tan A_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{+0{,}17}{+0{,}33}$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}17 &= 9{,}23045 \\ \log 0{,}33 &= 9{,}51851 \\ \hline &\ 9{,}71194 \end{aligned}$$

$$\tan A_3 = \frac{p_3}{q_3} \quad \frac{+0{,}05}{-0{,}18}$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}05 &= 8{,}69897 \\ \log -0{,}18 &= 9{,}25527\ n \\ \hline &\ 9{,}44370\ n \end{aligned}$$

$$\tan A_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{-0{,}03}{-0{,}08}$$

$$\begin{aligned} \log -0{,}03 &= 8{,}47712\ n \\ \log -0{,}08 &= 8{,}90309\ n \\ \hline &\ 9{,}57403 \end{aligned}$$

$$\tan A_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{-0{,}06}{+0{,}01}$$

$$\begin{aligned} \log -0{,}06 &= 8{,}77815\ n \\ \log 0{,}01 &= 8{,}00000 \\ \hline &\ 0{,}77815\ n \end{aligned}$$

$A_1 = 93^\circ\ 37'\ 4,''5 = 93^\circ,62$

$A_2 = 27\ 15\ 19,4 = 27^\circ,26$

$A_3 = 164\ 28\ 33,1 = 164^\circ,48$

$A_4 = 20\ 33\ 21,6 = 20^\circ,56$

$A_5 = 99\ 27\ 44,6 = 99,^\circ46$

Resultado:

$$y = 13^\circ,66 + 6,02 \text{ sen } (x + 93^\circ,62) + 0,37 \text{sen } (2x + 27^\circ,26) + 0,19 \text{ sen } (3x + 164^\circ,48) - 0,09 \text{ sen } (4x + 20^\circ,56) - 0,06 \text{ sen } (5x + 99,^\circ46) - 0,09 \text{ sen } (6x - 90^\circ).$$

Cálculo de las ordenadas

1.ª armónica

x	x+93° 37'								Ordenadas
0°	93°	37'	sen	=	+ 0,998	×	+ 6,02	=	+ 6,01
30	123	37	»	=	+ 0,833	»	»	=	+ 5,01
60	153	37	»	=	+ 0,444	»	»	=	+ 2,67
90	183	37	»	=	— 0,063	»	»	=	— 0,38
120	213	37	»	=	— 0,554	»	»	=	— 3,34
150	243	37	»	=	— 0,896	»	»	=	— 5,39
180	273	37	»	=	— 0,998	»	»	=	— 6,01
210	303	37	»	=	— 0,833	»	»	=	— 5,01
240	333	37	»	=	— 0,444	»	»	=	— 2,67
270	3	37	»	=	+ 0,063	»	»	=	+ 0,38
300	33	37	»	=	+ 0,554	»	»	=	+ 3,34
330	63	37	»	=	+ 0,896	»	»	=	+ 5,39
360°	93°	37'	»	=	+ 0,998	»	»	=	+ 6,01

2.ª armónica

x	2x	2x+27°15'							Ordenadas
0°	0°	27°	15'	sen	= + 0,458	×	+ 0,37	=	+ 0,17
30	60	87	15	»	= + 0,999	»	»	=	+ 0,37
60	120	147	15	»	= + 0,541	»	»	=	+ 0,20
90	180	207	15	»	= — 0,458	»	»	=	— 0,17
120	240	267	15	»	= — 0,999	»	»	=	— 0,37
150	300	327	15	»	= — 0,541	»	»	=	— 0,20
180	360	27	15	»	= + 0,458	»	»	=	+ 0,17
210	60	87	15	»	= + 0,999	»	»	=	+ 0,37
240	120	147	15	»	= + 0,541	»	»	=	+ 0,20
270	180	207	15	»	= — 0,458	»	»	=	— 0,17
300	240	267	15	»	= — 0,999	»	»	=	— 0,37
330	300	327	15	»	= — 0,541	»	»	=	— 0,20
360°	360°	27°	15'	»	= + 0,458	»	»	=	+ 0,17

3.ª armónica

x	3x	3x+164°29'							Ordenadas
0°	0°	164°	29'	sen	= + 0,268	×	+ 0,19	=	+ 0,05
30	90	254	29	»	= — 0,964	»	»	=	— 0,18
60	180	344	29	»	= — 0,268	»	»	=	— 0,05
90	270	74	29	»	= + 0,964	»	»	=	+ 0,18
120	360	164	29	»	= + 0,268	»	»	=	+ 0,05
150	90	254	29	»	= — 0,964	»	»	=	— 0,18
180	180	344	29	»	= — 0,268	»	»	=	— 0,05
210	270	74	29	»	= + 0,964	»	»	=	+ 0,18
240	360	164	29	»	= + 0,268	»	»	=	+ 0,05
270	90	254	29	»	= — 0,964	»	»	=	— 0,18
300	180	344	29	»	= — 0,268	»	»	=	— 0,05
330	270	74	29	»	= + 0,964	»	»	=	+ 0,18
360°	360°	164°	29'	»	= + 0,268	»	»	=	+ 0,05

4.ª armónica

x	4x	4x+20° 33′	Ordenadas
0°	0°	20° 33′ sen	= + 0,351 × —0,09 = — 0,03
30	120	140 33 »	= + 0,635 » » = — 0,06
60	240	260 33 »	= — 0,986 » » = + 0,09
90	360	20 33 »	= + 0,351 » » = — 0,03
120	120	140 33 »	= + 0,635 » » = — 0,06
150	240	260 33 »	= — 0,986 » » = + 0,09
180	360	20 33 »	= + 0,351 » » = — 0,03
210	120	140 33 »	= + 0,635 » » = — 0,06
240	240	260 33 »	= — 0,986 » » = + 0,09
270	360	20 33 »	= + 0,351 » » = — 0,03
300	120	140 33 »	= + 0,635 » » = — 0,06
330	240	260 33 »	= — 0,986 » » = + 0,09
360°	360°	20° 33′ »	= + 0,351 » » = — 0,03

5.ª armónica

x	5x	5x+99° 28′	Ordenadas
0°	0°	99° 28′ sen	= + 0,986 × —0,06 = — 0,06
30	150	249 28 »	= — 0,936 » » = + 0,06
60	300	39 28 »	= + 0,636 » » = — 0,04
90	90	189 28 »	= — 0,164 » » = + 0,01
120	240	339 28 »	= — 0,351 » » = + 0,02
150	30	129 28 »	= + 0,772 » » = — 0,05
180	180	279 28 »	= — 0,986 » » = + 0,06
210	330	69 28 »	= + 0,936 » » = — 0,06
240	120	219 28 »	= — 0,636 » » = + 0,04
270	270	9 28 »	= + 0,164 » » = — 0,01
300	60	159 28 »	= + 0,351 » = — 0,02
330	210	309 28 »	= — 0,772 » » = + 0,05
360°	360°	99° 28′ »	= + 0,986 » » = — 0,06

6.ª armónica

x	6x	6x—90°	Ordenadas
0°	0°	—90°	sen = — 1,000 × — 0,09 = + 0,09
30	180	90	» = + 1,000 » » » = — 0,09
60	360	270	» = — 1,000 » » » = + 0,09
90	180	90	» = + 1,000 » » » = — 0,09
120	360	270	» = — 1,000 » » » = + 0,09
150	180	90	» = + 1,000 » » » = — 0,09
180	360	270	» = — 1,000 » » » = + 0,09
210	180	90	» = + 1,000 » » » = — 0,09
240	360	270	» = — 1,000 » » » = + 0,09
270	180	90	» = + 1,000 » » » = — 0,09
300	360	270	» = — 1,000 » » » = + 0,09
330	180	90	» = + 1,000 » » » = — 0,09
360°	360°	270	» = — 1,000 » » » = + ,009

Cálculo de la 5.ª armónica
por las
fórmulas rigurosas del "Análisis Armónico"

x	y	cos 5 x	sen 5 x	y cos 5 x	y sen 5 x
0°	19,91	1,000	0,000	19,91	0,00
30	18,79	-0,866	0,500	—16,27	9,40
60	16,62	0,500	—0,866	8,31	14,39
90	13,19	0,000	1,000	0,00	13,19
120	10,06	—0,500	—0,866	— 5,03	— 8,71
150	7,85	0,866	0,500	6,80	3,93
180	7,88	—1,000	0,000	— 7,88	0,00
210	9,00	0,866	—0,500	7,79	— 4,50
240	11,43	—0,500	0,866	— 5,72	9,90
270	13,57	0,000	—1,000	0,00	—13,57
300	16,59	0,500	0,866	8,30	14,37
330	19,07	—0,866	—0,500	—16,51	— 9,54
			Σ =	— 0,30	+ 0,08

$$p_5 = \frac{2}{12} \Sigma\, y_r \cos 5\, x_r = -0{,}05$$

$$q_5 = \frac{2}{12} \Sigma\, y_r \,\mathrm{sen}\, 5x_r = +\, 0{,}01$$

5.ª armónica = —0,05 cos 5 x + 0,01 sen 5 x.

Error medio y error probable de las observaciones de la temperatura correspondiente a un mes cualquiera

Si comparamos las temperaturas calculadas por la serie trigonométrica de Fourier (C), con las admitidas por ciertas, y deducidas de la observación (O), y llamamos $[\epsilon]$, $[\epsilon^2]$, $\Sigma\epsilon$, $\Sigma\epsilon^2$, a los *errores residuales*, sus cuadrados, y las sumas respectivas, tendremos, como *error medio* y *error probable* de las observaciones de la temperatura correspondiente a un mes cualquiera, los valores que se indican en seguida:

Meses	y (O)	y (C)	$[\epsilon]$	$[\epsilon^2]$
En.	19,91	19,89	—0,02	0,00
F.	18,79	18,77	—0,02	0,00
Mzo.	16,62	16,62	0,00	0,00
Ab.	13,19	13,28	+0,09	0,01
Myo.	10,06	10,05	—0,01	0,00
Jn.	7,85	7,84	—0,01	0,00
Jl.	7,88	7,89	+0,01	0,00
Ag.	9,00	8,99	—0,01	0,00
Sep.	11,43	11,46	+0,03	0,00
Oct.	13,57	13,56	—0,01	0,00
Nov.	16,59	16,59	0,00	0,00
Dic.	19,07	19,08	+0,01	0,00

$\Sigma\epsilon = +0^{\circ}{,}06$ $\Sigma\epsilon^2 = 0^{\circ}{,}01$

$$e = \pm \sqrt{\frac{0^{\circ}01}{11}} = \pm \sqrt{0^{\circ}{,}00} = \pm\, 0^{\circ}{,}00$$

$$r = 0{,}674 \times \pm\, 0{,}^{\circ}00 = \pm\, 0{,}^{\circ}00$$

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Al emprender este trabajo, el único propósito que nos ha guiado ha sido el de presentar ante vosotros, con todos los detalles posibles; *los métodos más sencillos y más directos* para conseguir la descomposición de una curva compleja en las sinusoides componentes, que, es, sin duda, el problema fundamental del *"Análisis Armónico"*.

Con tal fin, *hemos descompuesto y analizado la curva de la temperatura de Santiago,* aprovechando observaciones efectuadas en el *"Observatorio Astronómico Nacional"* durante cuarenta años.

El largo período de tiempo que abarcan estas observaciones, y la exactitud con que se han realizado, nos ha permitido dilucidar este problema bajo sus dos fases principales, a saber: 1.ª, cuando la función se conoce de un modo completo; y 2.ª, cuando sólo se le conoce de un modo incompleto; pero, al mismo tiempo, la perfecta regularidad de esta curva, que es una sinusoide casi ideal, sólo ha permitido descomponerla en otra sinusoide de casi igual amplitud e igual periodicidad que ella, y en varias otras curvas de tan pequeña amplitud que, para definirlas bien, ha sido necesario aumentar muchísimo la escala vertical.

Todo esto nos demuestra, tal como era fácil presumirlo, que *la curva de la temperatura de Santiago* es una curva sencilla y de origen netamente solar, con sus máximos y mínimos bien caracterizados, y que sólo tiene una íntima y estrecha relación con *la posición de la Tierra en su órbita,* pues las irregularidades debidas a otras causas interferentes se puede decir que no existen, o, por lo menos, son tan débiles que no tienen influencia alguna en la marcha de la temperatura.

Sin embargo, un estudio más a fondo de las *seis armónicas* en que ha sido descompuesta la onda principal, y *cuyos períodos son sub-múltiplos de ésta,* quizás pudiera permitirnos descubrir las pequeñísimas alteraciones que sufre la temperatura, ya sea por la influencia de los vientos reinantes o de la corriente marítima que recorre todo nuestro extenso litoral o de la nebulosidad del cielo, etc., etc.; pero todo esto sería materia de un estudio especialísimo y que exigiría un análisis muy concienzudo y muy minucioso para llegar a conclusiones satisfactorias.

Así, pues, creemos que la parte fundamental del *"Análisis Armónico"* habrá quedado bien demostrada con todos los cálculos que anteceden, sin perjuicio de que se puedan adelantar y profundizar más hasta sacar de ellos las mayores luces y enseñanzas.

Por lo menos, estoy seguro de poder afirmar que el gráfico dibujado con las ordenadas obtenidas por medio de las series trigonométricas de Fourier nos permitirá conocer, con una aproximación muy grande, la temperatura media reinante en Santiago para cualquier día y en cualquiera época del año.

Por otra parte, el principal objeto de este trabajo ha sido, como ya antes lo insinuamos, despertar interés entre vosotros por la aplicación, en grande escala, del "*Análisis Armónico*" a los múltiples fenómenos periódicos que se presentan en la Naturaleza; pues estoy convencido de que sólo los ingenieros, acostumbrados al manejo de complicadas curvas y gráficos, son los únicos que están debidamente capacitados para darles a estas disciplinas científicas un rumbo y una organización práctica y eficiente.

Desde luego, aparte de las grandes aplicaciones que tiene este método en el estudio de las complejas curvas que tan a menudo se presentan en electrotecnia y en las ciencias físicas en general, un campo inmenso de actividad se abre a nuestros ingenieros en el análisis científico de las complicadas mareas que reinan en muchos de nuestros puertos situados en la desembocadura de ríos correntosos, como, por ejemplo, *Constitución, Corral, Canal de Chacao*, etc., etc., en los que hoy día, por falta de datos suficientes, no *puede hacerse una predicción exacta de la marea*, ya que para esto se requeriría también el *conocimiento exacto de cuatro o más parámetros*, y el único método capaz de resolver el problema es el llamado "*Análisis Armónico*".

Nuestros ingenieros serían también los únicos técnicos que podrían introducir aparatos mecánicos destinados a substituir los complicados cálculos del "*Análisis Armónico*", y, sobre este particular, debo citar la "*Máquina de Análisis Armónico*" de Lord Kelvin, que tan buenos resultados ha dado para la predicción exacta de las mareas en Inglaterra, en Escocia y en la India (1).

(1) En una obra que poseo en mi Biblioteca particular, cuyo título es: "*The Tides and Kindred Phenomena in the Solar System*" por Sir George Howard Darwin, K. C. B. Londres, 1911, viene una ligera descripción de la máquina de Lord Kelvin; pero es tan vaga e incompleta que no he podido reproducirla en el *Apéndice* de este trabajo, como habrían sido mis deseos.

Debo también agregar que en las siguientes publicaciones hay buenos datos e informaciones sobre dicho instrumento.

Sus títulos y autores son:

Sir William Thomson, "*Tidal Instruments*", and the subsequent discussion. "Institute of Civil Engineers", vol. LXV.

William Ferrel, "*Description of a Maxima and Minima Tidepredicting Machine*". United States Coast Survey, 1883.

En la obra "*Napier's Tercentenary*" *Edinburgh*, viene asimismo una descripción muy completa de esta máquina.

(*Continuará*)